大学数学试卷 2021.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^2B+A=B+E$，求矩阵 B 及行列式 $|B|$.

2. 设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求常数 a,b 的值.

3. α 为 n 维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵，求实数 k 的取值范围.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$，证明 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{\mathrm{T}}AP$.

二、 (本题12分) 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f=2y_1^2+y_3^2$，试求 a,b.

三、 (本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为2，向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的全部特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A.

四、 (本题12分) 设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性无关，又 $\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$. 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

(1) 证明：方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解; (2) 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

五、 (本题12分) 设 A 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关; (2) 若 $A^3\beta=A\beta$，求秩 $\mathrm{r}(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

六、 (本题12分) 已知线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}.$$

试求：(1) 基 β_1,β_2,β_3; (2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下具有相同坐标的全部向量.

七、 (本题12分) (1) 已知矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=1$，证明：存在非零列向量 α 和 β，使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2) 已知矩阵 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 也线性无关，证明：$\mathrm{r}(A)=2$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$

$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}$

$A=\alpha\beta^T$

$r(A)=1$

大学数学试卷

2022.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

分块阵.

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值. $= -84 \times 15 \cdots = -99$

平方和=1.

2. 求与向量 $\alpha = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \beta = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 均正交且长度为3的向量.

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$a^2+b^2+c^2=9$, $a+b+c=0$, $2a+c=0$; $c=-2a$, $b=a$; $a^2+a^2+4a^2=9$, $a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$A^* = \frac{A^{-1}}{|A|}$.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1, 1, 3$. 求二次型 $f(x,y,z) = (x,y,z)A^*(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 的正惯性指数和负惯性指数，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

$|A| = -3$. $A^* = \frac{1}{|A|}A^{-1}$. $= -\frac{1}{3}(-1)$ $A^* \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$ $(1, 2)$

$\dim(V) = r(A)$

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $V = \{\, Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \,\}$ 的维数. $\dim(V) = A$的列秩 $= r(A) = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r=2$ 2

二、 (本题12分) 求向量组 $\alpha_1 = (1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,3,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (3,0,7,14)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_5 = (2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$的秩,找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$ $\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$

秩相同同解.

三、 (本题12分) 设 A, B, C 是三个 n 阶实方阵，满足 $r(AB) = r(B)$. 试证明 $r(ABC) = r(BC)$.

$\Rightarrow$ $ABCx=0$与$BCx=0$同解. $ABy=0$ 同解 $\xi = Cx$. $By=0$与$ABy=0$同解

$\Leftarrow$ $BCx=0 \Rightarrow ABCx=0$ $AB\xi=0$ $AB\xi=0 \Rightarrow B\xi=0$ $ABCx=0 \Rightarrow BCx=0$

四、 (本题12分) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$，其中 a, b, c, d 是两两不等的正实数.

$B = aE + bA + cA^2 + dA^3$

(1) 计算 A^2, A^3, A^4;

(2) 求 B 的所有特征值及其重数.

A的特征值 $\Rightarrow B$ 有能求 $B = aE + bA + cA^2 + dA^3$

$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -c & -d \\ -d & \lambda-a & -b & -c \\ -c & -d & \lambda-a & -b \\ -b & -c & -d & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-b-c-d)\begin{vmatrix} 1 & -b & -c & -d \\ 1 & \lambda-a & -b & -c \\ 1 & -d & \lambda-a & -b \\ 1 & -c & -d & \lambda-a \end{vmatrix}$

五、 (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中有两组基底 $\varepsilon_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\eta_1 = (1,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \eta_2 = (2,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \eta_3 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \eta_4 = (0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵 P;

(2) 求 $\zeta = (1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 在基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

$\zeta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)(\cdots)$

对角化. 分解.

六、 (本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

(1) 证明对于任意的正整数 k，必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1} = A$;

(2) 若存在实矩阵C满足$A = C^2$，是否可以说明A是半正定矩阵？若是,给出证明.若不是,给出例子.

不是. 取 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 实对称, 但不半正定

七、 (本题12分) 具有待定系数 $a > 0$ 的二次型 $f(x,y,z) = 2x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 2ayz$ 经过正交变换可变为标准形 $g(u,v,w) = 8u^2 + 2v^2 + 18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & a \\ 0 & a & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 2 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$

$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & & \\ & \lambda-13 & -a \\ & -a & \lambda-13 \end{pmatrix}$

$(\lambda-2)\left[(\lambda-13)^2 - a^2\right] = 0$

$25 - a^2 = 0$. $a = \pm 5$. $a = 5$

$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$

$= P\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt[2k+1]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[2k+1]{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdots (\cdots)}_{2k+1个} P^{\mathrm{T}}$

$= P\underbrace{B \cdot B \cdots}_{2k+1个} P^{\mathrm{T}}$

$= PB^{2k+1}P^{\mathrm{T}}$

故 $A = B^{2k+1}$

南京大学数学试卷 2022.6.13

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

$(a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & -b \\ 1 & b & a & -b \\ 1 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$　$(a+b)\begin{vmatrix} a & b & -b \\ b & a & -b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$=(a+b)(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)^2$

2. 令 $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $((A^*)^{\mathrm{T}})^*$.

$=((A^*)^*)^T$　$(A)^* \cdot A^{-1} = \frac{A}{|A|}$

$(A^*)^* \cdot A^* = |A|^2$.　$(A^*)^* = |A|^2 \cdot (A^*)^{-1} = |A|^2 \frac{A}{|A|} = |A| A = \cdots$

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x,y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

$12-x^2>0$　$60-5x^2-3y^2>0$　$4\pi ab$　$2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{15}\pi$

4. 求 $\alpha_1=(0,2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(3,4,2,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(0,0,0,7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4=(1,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{20} \le 1$

二、 (本题12分) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \ge 1)$.

$AB=BA$?

$A^{2n}=E$, $A^{2n+1}=A$

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & AB+BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^3 & A^2B+(AB+BA)A \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$　$2A^2B \Rightarrow 4A^2B$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

三. (本题12分) 设线性方程组 $AX=B$ 中 $r(A)=2$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其解向量，满足 $4\alpha_1-3\alpha_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $2\alpha_2+\alpha_3=(0,3,9,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_1+3\alpha_3=(0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$. 求 $AX=B$ 的通解.

两个基础解系

$A\alpha_1=B$, $A\alpha_2=B$, $A\alpha_3=B$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\alpha_1$

四. (本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots$　$\lambda E - A$

五. (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中有两组基 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$, 和 $\beta_1=(3,2,2)^{\mathrm{T}}, \beta_2=(0,2,0)^{\mathrm{T}}, \beta_3=(-2,2,4)^{\mathrm{T}}$. 试用 β_1,β_2,β_3 的线性组合表达 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\beta_1\beta_2\beta_3)P$　$(\beta_1\beta_2\beta_3 | \alpha_1\alpha_2\alpha_3)$

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明 A 的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 使得 $A\alpha_i=\alpha_i, A\beta_j=-\beta_j, (1\le i\le m, 1\le j\le n-m)$.

$A^T=A$, $AA^T=E \Rightarrow A^2=E$　$\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm1$.

$\lambda=1$ (m重) $\lambda=-1$ ($n-m$重) $\to$ 存在正交阵 $U=(\alpha_1,\cdots\alpha_m\beta_1\cdots\beta_{n-m})$. $U^TAU=\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}$

$A\alpha_i=\alpha_i$ $A\beta_j=-\beta_j$ 故 ……

七. (本题12分) (1) 计算n阶上三角实方阵全体和n阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间V和W的维数.

(2) 计算实线性空间 $V\cap W$ 和 $V+W$ 的维数.

$E_{ij}=e_ie_j^T$.

E_{ij}　$i=1,2,\cdots,n$.　$j=i,i+1,\cdots,n$.　$\frac{n(n+1)}{2}$

$\dim(V)=\frac{n(n+1)}{2}$

同理 $\dim(W)=\frac{n(n+1)}{2}$

$V+W=R^{n\times n}$

$\dim(V+W)=n^2$

$\dim(V\cap W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V+W)=n$

大学数学试卷　　2023.2.21（因疫情延考）

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值及其重数.

3. 取正交矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. 求最小的正整数 n 使得 $A^n = E_2$ 成立.

4. 求 $\alpha_1 = (1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (5,3,0,-7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (3,2,4,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (4,3,-2,-6,4)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大线性无关组.

二、(本题12分) 令 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^3$ 为一组两两正交的单位列向量，令 $A = \beta\alpha^{\mathrm{T}} + \gamma\beta^{\mathrm{T}} + \alpha\gamma^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $A\alpha, A\beta, A\gamma$. 给出 A 的一个属于特征值1 的特征向量. (6分)

(2) 求 $|A|$ 和 $\mathrm{tr}(A)$. (6分)

三、(本题12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$, $(a, b \geq 0)$.

(1) 当 $a = 1, b = 2$ 时，试求方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. （10分）

(2) 当 a, b 满足什么条件时 A 无法对角化. (2分)

四、(本题12分) 用配方法将实二次型 $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz + 6yz$ 化成一个标准形，指出所用的线性变换并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

五、(本题12分) 令 $V = \{\, x :\ x = C_1 + C_2\cos t + C_3\cos^2 t + C_4\cos^3 t,\ C_k \in \mathbf{R}, \mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}\pi] \,\}$ 为定义在 $[0, 2\pi]$ 上的函数集.

(1) 证明 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. (6分)

(2) 证明 $\{\, 1, \cos t, \cos^2 t, \cos^3 t \,\}$ 为 V 的一组基. (6分)

六、(本题24分) 设 B 为 n 阶实对称矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算 $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}$. (6分)

(2) 设 A 为 m 阶实对称矩阵，C 为 m 阶可逆实矩阵. 证明 A 正定当且仅当 $C^{\mathrm{T}}AC$ 正定. (6分)

(3) 证明 $E - B^2$ 为对称矩阵. 证明 $E - B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

(4) 利用以上结论证明实对称矩阵 $\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

大学数学试卷　　2023.6.14

$-2\neq 0$

$|C|=|A||B|=|-8+6|=-6$

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

$|C|=|A||B|$

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&4&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&-1\\0&0&5\end{pmatrix}$, $C=AB$，计算行列式 $|C|$ 的值.

先计算

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}$，求齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.

3. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$，计算二次型的正负惯性指数.

4. 设 T 为3维实线性空间 V 上的线性变换，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 V 上的一组基，V 中的3个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有关系 $T\alpha_1=\alpha_3, T\alpha_2=\alpha_1, T\alpha_3=-\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)^{\mathrm T},(-1,2,0)^{\mathrm T},(1,2,-1)^{\mathrm T}$，求 T 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵 A.

$T(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

二、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，其中 k 为参数.

$|\beta, A\beta, A^2\beta|=0.$

(1) 若 $\beta=(1,2,1)^{\mathrm T}$，求参数 k 的范围使得 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性相关.

(2) 若 A 有特征值 $1,2,5$，求参数 k 的范围.

$|A|=10.$　$k=4.$

三、(本题12分) 设 $A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm T},\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm T}$, $\alpha_3=(2,0,1)^{\mathrm T}$ 为对应特征向量.

(1) 计算 $B=2E+A$ 的特征值和特征向量. 3 4 5.

(2) 若 $C\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 有关系 $C\alpha_1=(1+\lambda_1)\alpha_1, C\alpha_2=(2+\lambda_2)\alpha_2, C\alpha_3=(3+\lambda_3)\alpha_3$，计算矩阵 C.

2　4　6.

四、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm T}AQ$ 为对角矩阵.

五、(本题12分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)=x^{\mathrm T}Ax$ 为实二次型，其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}, A^{\mathrm T}=A$, $x\in\mathbf{R}^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组.

(1) 证明若二次型 $f(x)$ 为正定二次型，则有 $f(\alpha_i)>0, i=1,2,\cdots,n$.　$\alpha_i\neq 0$.　$f(\alpha_i)>0$

(2) 举出反例说明由 $f(\alpha_i)>0, i=1,2,\cdots,n$ 不能得出 $f(x)$ 是正定二次型.

六、(本题12分) 设 W_1,W_2,W_3 为 $\mathbf{R}^4$ 上的子空间，其中 $\alpha_1=(1,-2,1,2)^{\mathrm T},\alpha_2=(1,0,-5,6)^{\mathrm T}$ 为 W_1 的一组基，$\beta_1=(1,-1,-2,4)^{\mathrm T},\beta_2=(-2,3,2,2)^{\mathrm T}$ 为 W_2 的一组基，$\gamma_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm T}$, $\gamma_2=(2,1,2,-4)^{\mathrm T}$ 为 W_3 的一组基.

(1) 求子空间 W_1+W_2 的一组基.

(2) 求子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2)$ 极大无关组：$\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2$

七、(本题12分) (1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots n\\ j\neq i}}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，证明$Ax=\theta$只有零解.

$r(A)=n.$

(2) 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$s=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$，利用(1)的结论证明矩阵 $C=sE+B$ 可逆.

大学数学试卷 答案 2021.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^2B+A=B+E$，求矩阵 B 及行列式 $|B|$.

解：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A-E)(A+E)B=E-A$，且 $|A-E|=-2\neq 0$，

故 $(A+E)B=-E$，$B=-(A+E)^{-1}=-\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1/3&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解法二：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，

故 $B=(A^2-E)^{-1}(E-A)=\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解法三：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，解矩阵方程

$$(A^2-E,E-A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-4&0&0&2\\0&3&0&0&-1&0\\-2&0&2&1&0&0\end{array}\right)^{-1}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1/3&0\\0&0&1&-1/2&0&-1\end{array}\right),$$

故 $B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

2. 设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求常数 a,b 的值.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{b+1}{-1}$.

解得 $a=-3,b=0$.

解法二：因为 $A\alpha=\lambda\alpha$，故得 $\begin{cases}-1&=&\lambda,\\a+2&=&\lambda,\\b+1&=&-\lambda.\end{cases}$，解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

解法三：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，知 $\mathrm{r}(\alpha,A\alpha)=1$。

而 $(\alpha,A\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&a+2\\-1&b+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&a+3\\0&b\end{pmatrix}$，可得 $a=-3,b=0$.

3. α 为 n 维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 为正定矩阵，求实数 k 的取值范围.

解：由 $\mathrm{r}(E-A)=1$ 可知 1 为 A 的 $n-1$ 重特征值，又因为 $A\alpha=(1-k)\alpha$，

所以 $1-k$ 为 A 的 1 重特征值，由 A 正定知 $1-k>0$ 即 $k<1$.

解法二：设 $B=\alpha\alpha^{\mathrm T}$，由 α 为 n 维实单位列向量，可得 $B^2=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}=B$，于是 $B^2-B=O$.

设 λ 为 B 的特征值，ξ 为对应的特征向量，则有 $\theta=O\xi=(B^2-B)\xi=(\lambda^2-\lambda)\xi$，

故有 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$，即 B 的特征值 $\lambda=0$ 或者1，于是 $A\xi=(E-kB)\xi=(1-k\lambda)\xi$，

即 A 的特征值为 1 或者 $1-k$，由于 A 正定，故 $1-k>0$，即 $k<1$.

解法三：由单位向量 α 构造标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，其中 $\beta_1=\alpha$，令 $P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，

则有 $\alpha^{\mathrm T}P=\alpha^{\mathrm T}(\alpha,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(e_1,0,\cdots,0)=E_{11}$，于是

$$P^{\mathrm T}AP=E-kP^{\mathrm T}\alpha\alpha^{\mathrm T}P^{\mathrm T}=E-kE_{11}^{\mathrm T}E_{11}=\begin{pmatrix}1-k&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$,由于A正定,故$1-k>0$,即 $k<1$.

解法四：任取n维向量 $x\neq\theta$，$A=E-k\alpha\alpha^T$ 为正定矩阵，故要满足 $x^{\mathrm T}Ax=x^{\mathrm T}x-k(\alpha^{\mathrm T}x)^2>0$，

显然 $\alpha^{\mathrm T}A\alpha=\alpha^{\mathrm T}\alpha-k(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^2=1-k>0$. 当 $1-k>0$ 时，由柯西不等式 $(\alpha^{\mathrm T}x)^2\le(x^{\mathrm T}x)(\alpha^{\mathrm T}\alpha)=x^{\mathrm T}x$，

$\alpha^{\mathrm{T}}x \neq 0$ 时有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 \geq (\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = (1-k)(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 > 0$，
$\alpha^{\mathrm{T}}x = 0$ 时显然有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = x^{\mathrm{T}}x > 0$，故 k 满足 $k < 1$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，证明 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$.

证：依次交换 A 的第1,2行，第2,3行，同时做相应的列操作，可将 A 合同变换至 B，

即取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，可使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$. (P 也可以为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}$ 中的任何一种矩阵).

证法二：易知 A 有特征值 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$，对应特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则令 $P = (\pm\xi_2, \pm\xi_3, \pm\xi_1)$，则 P为正交阵，且 $P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B$.

(注：用 $P = \mathrm{diag}(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{c}{b}}, \sqrt{\frac{a}{c}})$ 是错的，因为 a, b, c 可能为0)

二、(本题12分) 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f = 2y_1^2 + y_3^2$，试求 a, b.

解：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = B$，可得 $A - E \sim B - E$，

可知 $|A| = 2ab - a^2 - b^2 = |B| = 0, |A - E| = 2ab = |B - E| = 0$，因此 $a = b = 0$.

解法二：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$，代入特征多项式 $|\lambda E - A|$ 得

$|2E - A| = -a^2 - b^2 - 2ab = 0, |0E - A| = a^2 + b^2 - 2ab = 0, |E - A| = -2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

解法三：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$，

$$
\begin{aligned}
\text{故 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & -b & \lambda - 1 \end{vmatrix} &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a^2 + b^2 - 2ab) \\
&= (\lambda - 2)\lambda(\lambda - 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,
\end{aligned}
$$

比较系数得 $2 - a^2 - b^2 = 2, a^2 + b^2 - 2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

三、(本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为2，向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的全部特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A.

解：(1) 由 $A(1, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 2(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，可知 $\lambda = 2$ 是 A 的一个特征值，且 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值2的特征向量. 再由 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$ 知，A 的特征值为0,0,2. 属于特征值0的全部特征向量为 $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$不全为0. 属于特征值2的全部特征向量形如 $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$.

(2) 将 α_1, α_2 正交化并单位化，可得 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$，

再将 α_3 单位化，得 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$. 则

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ 为正交阵且满足 } P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

(注：P 不唯一，只要构成矩阵 P 的前两列 β_1, β_2 与 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$ 构成标准正交向量组即可)

(3)解法一：$A = P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

解法二：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,2\alpha_3)$，故 $A = (0,0,2\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

解法二：(1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则根据条件，有 $A\alpha_1 = A\alpha_2 = 0, A\alpha_3 = 2\alpha_3$，即

$$\begin{cases}a_{11}-a_{13} & = & 0,\\ a_{21}-a_{23} & = & 0,\\ a_{31}-a_{33} & = & 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}-a_{12} & = & 0,\\ a_{21}-a_{22} & = & 0,\\ a_{31}-a_{32} & = & 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13} & = & 2,\\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & = & 2,\\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & = & 2.\end{cases}$$

解得 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=a_{33}=2/3$，即 $A = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda-2)$，故有特征值 $\lambda = 0$(二重), 2.
当$\lambda = 0$时,解得无关特征向量为:$\xi_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,特征向量为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2$不全为0.
当 $\lambda = 2$ 时，解得无关特征向量为：$\xi_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，特征向量为 $k_3\xi_3, k_3 \neq 0$.
(2) 将 $\lambda = 0$ 的无关特征向量 ξ_1, ξ_2 标准正交化得 $\beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，将 $\lambda = 2$ 的无关特征向量 ξ_3 单位化得 $\beta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，令 $P = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 P 正交且 $P^{\mathrm{T}}AP = \mathrm{diag}(0,0,2)$.

(3) 由(1)已得 $A = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

四、 (**本题12分**) 设 n 阶矩阵 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性无关，
又 $\alpha_n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}$. 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.
(1) 证明：方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多组解; (2) 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解：(1) 因为 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性表示，故方程组 $Ax = \beta$ 有解，即 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A,b)$.
又因为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，因此 $\mathrm{r}(A,b) = \mathrm{r}(A) < n$，从而方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多组解.
(2) $n-1 = \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}) \le \mathrm{r}(A) < n$，因此 $\mathrm{r}(A) = n-1$，又有 $\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$，
于是 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} + k(0,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数.

解法二：(1) $A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n) \overset{c_n - c_1 - \cdots - c_{n-1}}{\rightarrow} (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},0)$，
故$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}) = n-1$，$Ax = 0$基础解系含一个向量，由$\alpha_n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}$知，
$0\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$，即 $\xi = (0,1,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系.
又有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 知 $\eta = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，故 $Ax = \beta$ 通解为 $\eta + k\xi, k \in \mathbf{R}$.
由通解公式知 $Ax = \beta$ 有无穷多组解.
(2) 由(1)得到 $Ax = \beta$ 通解为 $\eta + k\xi, k \in \mathbf{R}$.

五、 (**本题12分**) 设 A 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，
对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.
(1) 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关; (2) 若 $A^3\beta = A\beta$，求秩 $\mathrm{r}(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

(1)证法一：由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 及 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i\ (i = 1,2,3)$，可知
$$A\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \quad , \qquad A^2\beta = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3,$$
设 $k_1\beta + k_2A\alpha + k_3A^2\beta = 0$，将上式代入整理可得
$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0.$$
因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量，必线性无关，于是
$$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0.$$
其系数行列式非零，因此必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

证法二：由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 及 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i\ (i = 1,2,3)$，可知
$$A\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \quad , \qquad A^2\beta = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3，于是$$

$$(\beta,A\beta,A^2\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B,$$

故 $|\beta,A\beta,A^2\beta|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\cdot|B|$，因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，故 $|B|=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$，且对应的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，于是 $|\beta,A\beta,A^2\beta|\neq 0$，即 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

(2) 解法一：由 $A^3\beta=A\beta$ 可得

$$A(\beta,A\beta,A^2\beta)=(A\beta,A^2\beta,A^3\beta)=(A\beta,A^2\beta,A\beta)=(\beta,A\beta,A^2\beta)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=(\beta,A\beta,A^2\beta)B.$$

记 $P=(\beta,A\beta,A^2\beta)$，$P$ 可逆且 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，则也有 $A-E\sim B-E,A+2E\sim B+2E$，

因此 $\mathrm{r}(A-E)=\mathrm{r}(B-E)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=2,|A+2E|=|B+2E|=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=6.$

解法二：由 $(A^3-A)\beta=0$，可知 $(\lambda_1^3-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_2^3-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_3^3-\lambda_3)\alpha_3=0$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 均满足方程 $\lambda^3-\lambda=0$，又因为 A 的特征值各不相同，因此只能分别是 $0,-1,1$，而 $A-E$ 的特征值为 A 的特征值减1即-1,-2,0，互不相同，可对角化，故 $A-E\sim\mathrm{diag}(-1,-2,0)$，从而 $\mathrm{r}(A-E)=2$，而行列式 $|A+2E|=(0+2)\cdot(-1+2)\cdot(1+2)=6$.

解法三：由 $(A^3-A)\beta=(A-E)(A+E)A\beta=(A-E)(A^2+A)\beta=(A-E)(A^2\beta+A\beta)=0$ 可知 $\xi_1=A^2\beta+A\beta$ 满足 $A\xi_1=\xi_1$，因为 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关，故 $\xi_1=A^2\beta+A\beta\neq 0$，于是 ξ_1 为 A 的属于特征值1的特征向量. 同理 $\xi_2=A^2\beta-A\beta\neq 0,\xi_3=A^2\beta-\beta\neq 0$ 分别为 A 的属于特征值-1和0的特征向量，故3阶矩阵 A 有互不相同的特征值1,-1,0，而 $A-E$ 的特征值为 A 的特征值减1即0,-2,-1，互不相同，可对角化，故 $A-E\sim\mathrm{diag}(0,-2,-1)$，从而 $\mathrm{r}(A-E)=2$，而行列式 $|A+2E|=(1+2)\cdot(-1+2)\cdot(0+2)=6$.

(注：(2)中如果用 $A^3\beta=\lambda^3\beta,A\beta=\lambda\beta$，故特征值满足 $\lambda^3-\lambda=0$ 是错误的，因为 β 不是 A 的特征值)

六、(本题12分) 已知线性空间 $\mathbf{R^3}$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}.$$

试求：(1) 基 β_1,β_2,β_3; (2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下具有相同坐标的全部向量.

解：(1) 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&5\\11&-2&8\\10&1&8\end{pmatrix},$$

因此基 $\beta_1=\begin{pmatrix}6\\11\\10\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}5\\8\\8\end{pmatrix}$.

(2)解法一：设所求向量的坐标为 x，则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Px$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $Px=x$，即 $(P-E)x=0$，经行变换，

$$P-E=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&-1&3\\3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $x=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=k(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

解法二 设所求向量的坐标为 x，则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x$，即 $(\beta_1-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2,\beta_3-\alpha_3)x=0$，解方程组

$$(\beta_1-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2,\beta_3-\alpha_3)=\begin{pmatrix}5&0&5\\11&-4&7\\9&-1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $x=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=k(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

七、(本题12分) (1) 已知矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=1$，证明：存在非零列向量 α 和 β，使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2) 已知矩阵 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 也线性无关，证明：$\mathrm{r}(A)=2$.

证：(1) $\mathrm{r}(A)=1$ 说明 A 的列秩为1，则 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的任意两列线性相关，

取 A 的一个非零列向量记为 α，则 $\alpha_i=b_i\alpha, i=1,2,\cdots,n$，记 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，
因为有一个 b_i 为1，则 β 非零，有 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2)解法一：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

$$2=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)+\mathrm{r}((\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})-2\le\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2，故\ \mathrm{r}(A)=2.$$

解法二：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

$$2=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)+\mathrm{r}((\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})-2\le\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})\le\mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})=2，故\ \mathrm{r}(A)=2.$$

解法三：根据结论：若 P 行满秩，则 $\mathrm{r}(AP)=\mathrm{r}(A)$. 可知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}((\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2$.

解法四：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，由线性无关性有 $\mathrm{r}(B)=2$.
只要证明 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，即可得 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=2$.
若 x 满足方程组 $Bx=0$，则有 $Ax=(\alpha_1,\alpha_2)Bx=0$，若 x 满足 $Ax=0$，令 $y=Bx$，
则有 $(\alpha_1,\alpha_2)y=0$，由于 α_1,α_2 线性无关，故 $y=0$，于是 $Bx=y=0$，即 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

证法二：(1) 因为 $\mathrm{r}(A)=1$ 我们有分解 $A=P\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，
其中 P,Q 可逆，$\alpha,\beta^{\mathrm{T}}$ 分别是 P,Q 的第一列和第一行，故 α,β 非零.

(2) 因为 α_1,α_2 线性无关，故存在可逆矩阵 P 使得 $P(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}$，

同理有可逆矩阵 Q 使得 $Q(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}$，

于是有 $PAQ^{\mathrm{T}}=P(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})Q^{\mathrm{T}}=P(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}(E_2,O)=\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & O\end{pmatrix}$，

故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(PAQ^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & O\end{pmatrix}=2$.

大学数学试卷 答案 2022.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 22 \\ 22 & 20 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (20^2 - 22^2)(1^2 - 4^2) = 1260.$

2. 求与向量 $\alpha = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \beta = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 均正交且长度为3的向量.

解：符合条件的向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 2a+c=0, \\ a^2+b^2+c^2=9. \end{cases}$

解得 $(a,b,c)^{\mathrm{T}} = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6})^{\mathrm{T}}$ 或$(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^{\mathrm{T}}$.

解法二：设满足正交的向量为 x，则有 $\begin{pmatrix} \alpha^{\mathrm{T}}x \\ \beta^{\mathrm{T}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \theta$.

解得基础解系为 $(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，单位化为 $\frac{\sqrt{6}}{6}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，所求向量为 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^{\mathrm{T}}$.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1,1,3$. 求二次型 $f(x,y,z) = (x,y,z)A^*(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 的正惯性指数和负惯性指数，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

解：$|A| = (-1)\times 1 \times 3 = -3 \neq 0$，故有 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1}$，则 A^* 的三个特征值为 $3,-3,-1$.
又 $(A^*)^{\mathrm{T}} = (-3A^{-1})^{\mathrm{T}} = -3(A^{\mathrm{T}})^{-1} = -3A^{-1} = A^*$，故 A^* 是实对称矩阵，为二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵，且有特征值 $3,-3,-1$，所以二次型 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数为1，负惯性指数为2.

解法二：实对称 A 有特征值 $-1,1,3$，故有正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}(-1,1,3) = B$，即 $A = QBQ^{\mathrm{T}}$.
$|A| = (-1)\times 1\times 3 = -3 \neq 0$，故 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1} = -3(QB^{-1}Q^{\mathrm{T}}) = Q\mathrm{diag}(3,-3,-1)Q^{\mathrm{T}}$，
令 $(x,y,z)^{\mathrm{T}} = Q(u,v,w)^{\mathrm{T}}$，则有 $f(x,y,z) = (u,v,w)\mathrm{diag}(3,-3,-1)(u,v,w)^{\mathrm{T}} = 3u^2 - 3v^2 - w^2$，
即二次型正惯性指数为1，负惯性指数为2.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数.

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\mathrm{r}(A) = 2$. 故 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数=A的列秩=$\mathrm{r}(A) = 2$.

解法二：因为 $|A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$，故 $\mathrm{r}(A) = 2$，故 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \}$ 的维数=A的列秩=$\mathrm{r}(A) = 2$.

解法三：$A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 α_1,α_2 可以作为列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组，即 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \} = \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的一组基，故 $\dim(V) = 2$.

解法四：令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则易知向量 α_2,α_2 线性无关，且有 $\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$，
故 α_1,α_2 是 $V = \{\ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3\ \} = \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的一组基，于是 $\dim(V) = 2$.

解法五：$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda+1)(\lambda-4)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$，对应特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关. 对 $\mathbf{R}^3$ 的任意向量 x 有 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$，则 $Ax = k_2\lambda_2\xi_2 + k_3\lambda_3\xi_3 \in \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$，
故 $V \subseteq \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$，又对任意 $y = k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ 有 $x = \frac{k_2}{\lambda_2}\xi_2 + \frac{k_3}{\lambda_3}\xi_3, Ax = y$，故 $V \supseteq \mathrm{span}\{\xi_2,\xi_3\}$.

故 $V=\operatorname{span}\{\xi_2,\xi_3\},\dim(V)=2$.

二、(**本题12分**) 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)\mathrm{T},\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}},\alpha_5=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$的秩,找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

解:$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

向量组的秩为3,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组的一个极大线性无关组. $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

三. (**本题12分**) 设 A,B,C 是三个 n 阶实方阵,满足 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$. 试证明 $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$.

证:只要证明 $ABCx=\theta$ 与 $BCx=\theta$ 同解.

显然若 x 满足 $BCx=\theta$,则有 $ABCx=A\theta=\theta$,即 x 也满足 $ABCx=\theta$.

反之若 x 满足 $ABCx=\theta$,令 $\xi=Cx$,则 ξ 满足 $AB\xi=\theta$.

易知 $By=\theta$ 的解空间是 $ABy=\theta$ 的解空间的子集,

由 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$ 知 $ABy=\theta$ 与 $By=\theta$ 解空间维数相同,故 $By=\theta$ 与 $ABy=\theta$ 同解,

于是由 $AB\xi=\theta$ 可得 $B\xi=BCx=\theta$,即 x 满足 $BCx=\theta$.

故 $ABCx=\theta$ 与 $BCx=\theta$ 同解,从而有 $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$.

证法二:我们有 $\mathrm{r}(ABC)\le\mathrm{r}(BC)$.

$$\text{又 }\mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}AB&O\\O&BC\end{pmatrix}\le\mathrm{r}\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}E&-A\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&BC\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-C\\O&E\end{pmatrix}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}O&-ABC\\B&O\end{pmatrix}=\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(-ABC)=\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(ABC).$$

故有 $\mathrm{r}(ABC)\ge\mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)-\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(BC)$,于是 $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$.

证法三:先证明当 $B=\operatorname{diag}(E_r,O)$ 时有 $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$.

令 $B=\operatorname{diag}(E_r,O),A=(A_1,A_2),A_1\in\mathbf{R}^{n\times r},A_2\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$,

则由 $AB=(A_1,O)$ 知 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A_1)=\mathrm{r}(B)=r$,即 A_1 为列满秩,

于是存在可逆矩阵 P 使得 $PA_1=\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$,从而有 $P(A_1,O)=\operatorname{diag}(E_r,O)$.

故 $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}((A_1,O)C)=\mathrm{r}(P(A_1,O)C)=\mathrm{r}(\operatorname{diag}(E_r,O)C)=\mathrm{r}(BC)$.

当 B 为任意 n 阶矩阵时,令 $\mathrm{r}(B)=r$,则有 $B=P\operatorname{diag}(E_r,O)Q$,其中 P,Q 为 n 阶可逆矩阵.

于是由上面的结论,有

$$\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}((AP)\operatorname{diag}(E_r,O)(QC))=\mathrm{r}(\operatorname{diag}(E_r,O)QC)=\mathrm{r}(P\operatorname{diag}(E_r,O)QC)=\mathrm{r}(BC).$$

四. (**本题12分**) 令 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{pmatrix}$,其中 a,b,c,d 是两两不等的正实数.

(1) 计算 A^2,A^3,A^4;　　(2) 求 B 的所有特征值及其重数.

解:(1) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},A^4=E$.

(2) $|\lambda E-B|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b&-c&-d\\-d&\lambda-a&-b&-c\\-c&-d&\lambda-a&-b\\-b&-c&-d&\lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d&\lambda-a-c&-b-d\\-b-d&\lambda-a-c&-b-d&\lambda-a-c\\-c&-d&\lambda-a&-b\\-b&-c&-d&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d&0&0\\-b-d&\lambda-a-c&0&0\\-c&-d&\lambda-a+c&-b+d\\-b&-c&b-d&\lambda-a+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a-c&-b-d\\-b-d&\lambda-a-c\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-a+c&-b+d\\b-d&\lambda-a+c\end{vmatrix}$$

$$=((\lambda-a-c)^2-(b+d)^2)((\lambda-a+c)^2+(b-d)^2)$$

$$=(\lambda-a-c-b-d)(\lambda-a-c+b+d)(\lambda-a+c-(b-d)i)(\lambda-a+c+(b-d)i)=0,$$

故特征值 $\lambda=a+c+b+d, a+c-b-d, a-c+(b-d)i, a-c-(b-d)i$，均为一重特征值.

(2)的解法二：易知 $B=aE+bA+cA^2+dA^3$，

令 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则 $B=f(A)$，于是 $\lambda(B)=f(\lambda(A))$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-1=0$，可得 A 的特征值 $\lambda=1,-1,i,-i$.

于是 $\lambda(B)=f(\lambda(A))=a+b+c+d, a-b+c-d, a-c+(b-d)i, a-c-(b-d)i$，均为一重特征值.

五. (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中有两组基底 $\varepsilon_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\eta_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \eta_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \eta_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \eta_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵 P;

(2) 求 $\zeta=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 在基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

解：(1) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P$，$P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^{-1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 7 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(2) 设所求坐标为 x，则有 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)x=\zeta$，于是有

$$x=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{-1}\zeta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ -1.5 & 1.5 & 0.5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\\-3/2\end{pmatrix}.$$

解法二：(1) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P$，解矩阵方程

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4|\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 7/4 & 1/2 & -1/4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/2 & 3/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 0 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4\end{array}\right),$$

解得 $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 7 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(2) 设所求坐标为 x，则有 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)x=\zeta$，解方程组

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\zeta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2\end{array}\right)，得\ x=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\\-3/2\end{pmatrix}.$$

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

(1) 证明对于任意的正整数 k，必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1}=A$;

(2) 若存在实矩阵C满足$A=C^2$，是否可以说明A是半正定矩阵？若是,给出证明.若不是,给出例子.

证：(1) A 实对称，则有正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D$，其中 D 是实对角矩阵.

令 $B=Q\mathrm{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}\ \sqrt[2k+1]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[2k+1]{\lambda_n})Q^{\mathrm{T}}$，易知 B 实对称.

且有 $B^{2k+1}=Q(\mathrm{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}\ \sqrt[2k+1]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[2k+1]{\lambda_n}))^{2k+1}Q^{\mathrm{T}}=QDQ^{\mathrm{T}}=Q(Q^{\mathrm{T}}AQ)Q^{\mathrm{T}}=A$.

(2) 不是. 取反对称矩阵 $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A=C^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，但不是半正定矩阵.

(2) 解法二：不是. 设实矩阵 $C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则实对称矩阵 $A=C^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & (a+d)b\\ (a+d)c & d^2+bc\end{pmatrix}$.

故有 $(a+d)b=(a+d)c$，不妨取 $a+d=0$，则 $A=\begin{pmatrix}a^2+bc & 0\\ 0 & a^2+bc\end{pmatrix}$.

可取 a,b,c 的值使得 $a^2+bc<0$，比如取 $a=d=0, b=1, c=-1$，则 $A=-E$ 不是半正定矩阵.

七. (本题12分) 具有待定系数 $a>0$ 的二次型 $f(x,y,z)=2x^2+13y^2+13z^2+2ayz$ 经过正交变换

可变为标准形 $g(u,v,w)=8u^2+2v^2+18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

解：二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&13&a\\0&a&13\end{pmatrix}$，

经过正交变换得到的标准形 $g(u,v,w)$ 的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&18\end{pmatrix}$.

故 A 正交相似于 B. 于是 $|A|=2(13^2-a^2)=|B|=8\times2\times18$，因为 $a>0$，故解得 $a=5$.

对于 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&13&5\\0&5&13\end{pmatrix}$，正交相似于 B，故 A 有特征值 $\lambda=8,2,18$.

对应于 $\lambda=8,2,18$ 的单位特征向量为 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 P 是正交矩阵，正交变换为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$.

南京大学数学试卷 答案 2022.6.13

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2-b^2) - b^2(a^2-b^2) = (a+b)^2(a-b)^2.$

解法二：$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & a+b \\ 0 & a+b & a+b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^2(a-b)^2.$

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $((A^*)^{\mathrm{T}})^*$.

解：$((A^*)^{\mathrm{T}})^* = ((A^*)^*)^{\mathrm{T}} = (|A|A)^{\mathrm{T}} = |A|A^{\mathrm{T}} = -109\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

解法二：由 $|A| = -109$ 得 $A^* = |A|A^{-1}$，故 $B = (A^*)^{\mathrm{T}} = |A|(A^{\mathrm{T}})^{-1}$，则 $|B| = |A|^3|(A^{\mathrm{T}})^{-1}| = |A|^2$.

于是 $((A^*)^{\mathrm{T}})^* = B^* = |B|B^{-1} = |A|^2|A|^{-1}A^{\mathrm{T}} = |A|A^{\mathrm{T}} = -109\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x, y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

解：该方阵正定当且仅当 $12 - x^2 > 0$ 且 $60 - 5x^2 - 3y^2 > 0$. 所有满足这两个不等式的实数对 (x, y) 的集合为椭圆 $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{20} < 1$. 其面积为 $\pi \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{20} = 4\sqrt{15}\pi$.

4. 求 $\alpha_1 = (0,2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (3,4,2,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0,0,0,7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大无关组，并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一组极大无关组，$\alpha_4 = -\dfrac{2}{3}\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\alpha_2 + \dfrac{1}{3}\alpha_3$.(极大无关组选取不唯一)

二、 (本题12分) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1)$.

解：令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 我们有 $A^2 = E, AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.因此

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}.$$

因此，当 n 为偶数时 $M=\begin{pmatrix}1&0&3n&2n\\0&1&2n&3n\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，当 n 为奇数时 $M=\begin{pmatrix}0&1&2n&3n\\1&0&3n&2n\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

解法二：易知 $K=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&2&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}$.

其中 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$，且有 $\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}, A^2=E$.

于是 $K^n=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}E&D\\O&E\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&O\\O&A^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&nD\\O&E\end{pmatrix}$.

故当 n 为偶数时，有 $K^n=\begin{pmatrix}E&nD\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3n&2n\\0&1&2n&3n\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

当 n 为奇数时，有 $K^n=\begin{pmatrix}A&nAD\\O&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2n&3n\\1&0&3n&2n\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

三. (**本题12分**) 设线性方程组 $AX=B$ 中 $\mathrm{r}(A)=2$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其解向量，满足 $4\alpha_1-3\alpha_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $2\alpha_2+\alpha_3=(0,3,9,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_1+3\alpha_3=(0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$. 求 $AX=B$ 的通解.

解：由于 $\mathrm{r}(A)=2$，未知数个数为4，$AX=\theta$ 的解空间维数为2.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=B$ 的解向量，从而

$4\alpha_1-3\alpha_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}, \frac{1}{3}(2\alpha_2+\alpha_3)=(0,1,3,1)^{\mathrm{T}}, \frac{1}{4}(\alpha_1+3\alpha_3)=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=B$ 的解，

从而 $(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}-(0,1,3,1)^{\mathrm{T}}=(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,3,1)^{\mathrm{T}}-(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}=(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=\theta$ 的两个解. 注意到这两个解线性无关，从而 $AX=\theta$ 的通解为 $k_1(1,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}, (k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

因此 $AX=B$ 的通解为 $(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,2,0)^{\mathrm{T}}, (k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

(本题通解表达式不唯一)

解法二：易知 $(4\alpha_1-3\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}4&0&1\\-3&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\2&9&4\\1&3&4\end{pmatrix}$.

解得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2/7&1/21&-2/21\\9/7&12/7&-3/7\\27/7&94/21&1/21\\1&1&1\end{pmatrix}$, 故$\alpha_1=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\9\\27\\7\end{pmatrix}, \alpha_2=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1\\36\\94\\21\end{pmatrix}, \alpha_3=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-2\\-9\\1\\21\end{pmatrix}$.

令 $\beta_1=\alpha_2-\alpha_1=\frac{1}{21}(-5,9,13,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2=\alpha_3-\alpha_1=-\frac{4}{21}(2,9,20,0)^{\mathrm{T}}$.

显然 β_1,β_2 为 $AX=\theta$ 的无关解，又由 $\mathrm{r}(A)=2$，故 β_1,β_2 构成 $AX=\theta$ 的一个基础解系，

故 $AX=B$ 的通解为：$\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2, k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

四. (**本题12分**) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解：设 $X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}, A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$. 我们有 $f(x,y,z)=X^{\mathrm{T}}AX$. A 的特征值为1,4,7. 它们的一个特征向量分别为 $\alpha_1=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$. 由于这三个分量分属对称矩阵 A 的三个不同特征值，所以它们两两正交，经它们单位化，得到正交矩阵 $U=(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$.
我们有 $U^{\mathrm{T}}AU=\mathrm{diag}(1,4,7)$. 令 $(u,v,w)^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}X$，标准形为

$f(u,v,w)=X^{\mathrm{T}}AX=(u,v,w)U^{\mathrm{T}}AU(u,v,w)^{\mathrm{T}}=u^2+4v^2+7w^2$.
正惯性指数为3，负惯性指数为0. (本题中二次型化为标准形形式不唯一)

五. (本题12分) 线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中有两组基 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，和 $\beta_1=(3,2,2)^{\mathrm{T}},\beta_2=(0,2,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(-2,2,4)^{\mathrm{T}}$. 试用 β_1,β_2,β_3 的线性组合表达 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

解：令 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P$，则有

$$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&2&2\\2&0&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&2&4\\3&-1&-2\\-1&3&-2\end{pmatrix}.$$

故有 $\alpha_1=\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{8}\beta_2-\frac{1}{8}\beta_3,\alpha_2=\frac{1}{4}\beta_1-\frac{1}{8}\beta_2+\frac{3}{8}\beta_3,\alpha_3=\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{4}\beta_2-\frac{1}{4}\beta_3$.

解法二：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-2&1&0&2\\2&2&2&1&1&0\\2&0&4&0&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/4&1/4&1/2\\0&1&0&3/8&-1/8&-1/4\\0&0&1&-1/8&3/8&-1/4\end{array}\right)$.

故有 $\alpha_1=\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{8}\beta_2-\frac{1}{8}\beta_3,\alpha_2=\frac{1}{4}\beta_1-\frac{1}{8}\beta_2+\frac{3}{8}\beta_3,\alpha_3=\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{4}\beta_2-\frac{1}{4}\beta_3$.

解法三：设 $\sum\limits_{i=1}^{3}k_{ij}\alpha_i=\beta_j(1\le j\le 3)$. 解得 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\\beta_2=2\alpha_1-\alpha_3\\\beta_3=2\alpha_2-\alpha_3\end{cases}$.

即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

从而 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}$，即有 $\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{8}\beta_2-\frac{1}{8}\beta_3\\\alpha_2=\frac{1}{4}\beta_1-\frac{1}{8}\beta_2+\frac{3}{8}\beta_3\\\alpha_3=\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{4}\beta_2-\frac{1}{4}\beta_3\end{cases}$.

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.
(1) 证明 A 的特征值为1或-1.
(2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 使得 $A\alpha_i=\alpha_i,A\beta_j=-\beta_j,(1\le i\le m,1\le j\le n-m)$.

证：(1) 由 A 的性质可得 $AA^{\mathrm{T}}=E_n$ 且 $A=A^{\mathrm{T}}$. 从而 $A^2=E_n$. 因此 A 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$. 所以 A 的特征值为1或-1.

(2) 由于 A 是对称实数矩阵且特征值为 1 或 -1，不妨设特征值 1 的重数为 m 而特征值 -1 的重数为 $n-m$. 那么存在正交矩阵 $U=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m})$ 使得 $U^{\mathrm{T}}AU=\begin{pmatrix}E_m&O\\O&-E_{n-m}\end{pmatrix}$.

从而 $(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m,A\beta_1,\cdots,A\beta_{n-m})=AU=U\begin{pmatrix}E_m&O\\O&-E_{n-m}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,-\beta_1,\cdots,-\beta_{n-m})$，

即有 $A\alpha_i=\alpha_i,A\beta_j=-\beta_j(1\le i\le m,1\le j\le n-m)$. 注意到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}$ 是正交矩阵 U 的 n 个列向量，所以是两两正交的单位向量.

证法二：(1) A 实对称且正交，故有 $A^2=A^{\mathrm{T}}A=E$. 设 λ 为 A 的任一特征值，对应特征向量为 ξ，则有 $A\xi=\lambda\xi$. 故 $\xi=A^2\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi$，由 $\xi\ne\theta$，故 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=\pm1$.

(2) A 实对称，故可对角化，. 设 A 有 m 个特征值 1， $n-m$ 个特征值 -1，
则对应于 1 有 m 个无关特征向量，标准正交化后得到 m 个标准正交的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，即有 $A\alpha_i=\alpha_i,1\le i\le m$.
同理有对应于 -1 的标准正交的特征向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$，有 $A\beta_j=-\beta_j,1\le j\le n-m$.
由于 α_i,β_j 对应不同的特征值，故正交，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 是标准正交向量组.

七. (本题12分) (1) 计算n阶上三角实方阵全体和n阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间V和W的维数.
(2) 计算实线性空间 $V\cap W$ 和 $V+W$ 的维数.

解：(1) 令 $E_{ij}=e_ie_j^{\mathrm{T}}$，其中 $e_i\in\mathbf{R}^n,i=1,2,\cdots,n$ 为 n 维列向量，除了第 i 个分量为1其余都是0.

则 $E_{ij}, i=1,2,\cdots,n, j=i,i+1,\cdots,n$ 构成 V 的一组基，共有基向量 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个，

故 $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

同理 $E_{ij}, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,i$ 构成 V 的一组基，有 $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) 易知 $V+W=\mathbf{R}^{n\times n}$，故 $\dim(V+W)=n^2$，从而 $\dim(V\cap W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V+W)=n$.

(2) 解法二：易知 $V\cap W$ 为n阶对角矩阵构成的空间，$E_{ii}, i=1,2,\cdots,n$ 为一组基，故 $\dim(V\cap W)=n$，
则 $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)=n^2$.

大学数学试卷 答案　　2023.2.21（因疫情延考）

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

解：利用行列式的列变换，得：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$

2. 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值及其重数.

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-8 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ \lambda-8 & \lambda & -2 & -2 & -2 \\ \lambda-8 & -2 & \lambda & -2 & -2 \\ \lambda-8 & -2 & -2 & \lambda & -2 \\ \lambda-8 & -2 & -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-8 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda+2)^4.$$

因此 A 的特征值为 8(重数为1)和 -2(重数为4).

3. 取正交矩阵 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. 求最小的正整数 n 使得 $A^n = E_2$ 成立.

解：注意到 $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & \sin\frac{n\pi}{6} \\ -\sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$. 因此 $n = 12$.

解法二：$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, A^6 = -E$，

$A^{6+k} = -A^k \neq E, k = 1, 2, \cdots, 5,\ \ A^{12} = E$，故知 $n = 12$.

4. 求 $\alpha_1=(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(5,3,0,-7,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(3,2,4,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_4=(4,3,-2,-6,4)^{\mathrm{T}}$ 的一组极大线性无关组.

解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一组极大线性无关组.

二、(本题12分) 令 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R^3}$ 为一组两两正交的单位列向量，令 $A = \beta\alpha^{\mathrm{T}} + \gamma\beta^{\mathrm{T}} + \alpha\gamma^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $A\alpha, A\beta, A\gamma$. 给出 A 的一个属于特征值 1 的特征向量. (6分)

(2) 求 $|A|$ 和 $\mathrm{tr}(A)$. (6分)

解：(1) 因为 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R^3}$ 为两两正交的单位列向量，故有 $A\alpha = \beta(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha) + \gamma(\beta^{\mathrm{T}}\alpha) + \alpha(\gamma^{\mathrm{T}}\alpha) = \beta$，$A\beta = \gamma, A\gamma = \alpha$，且 α, β, γ 线性无关，从而 $\alpha + \beta + \gamma \neq \theta$.

但是 $A(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$. 从而 $\alpha + \beta + \gamma$ 是 A 的一个属于特征值 1 的特征向量.

(2) 我们有 $A(\alpha,\beta,\gamma)=(\beta,\gamma,\alpha)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，从而 A 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 相似.

因此 $|A|=|B|=1,\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=0$.

三、(**本题12分**) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0\\b&1&a\\0&b&1\end{pmatrix}$，$(a,b\geq 0)$.

(1) 当 $a=1,b=2$ 时，试求方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.（10分）

(2) 当 a,b 满足什么条件时 A 无法对角化？(2分)

解：(1) 当 $a=1,b=2$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\-2(\lambda-1)&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1).$$

故特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$.

可以解得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 所对应的无关特征向量为 $\alpha_1=(1,0,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$.

取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$. 我们有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-1-\sqrt{2ab})(\lambda-1+\sqrt{2ab})$. 当 $ab\neq 0$ 时 A 有 3 个不同的特征值，A可对角化；当 $a=b=0$ 时，$A=E$可对角化；当 $ab=0$ 且 a,b 不全为 0 时，A有三重特征值1，但 A 的属于 1 的无关特征向量个数为 1，小于特征值重数 3，故 A 不可对角化.

综上所述，当 $ab=0$ 且 a,b 不全为 0 时 A 不可对角化.

四、(**本题12分**) 用配方法将实二次型 $f(x,y,z)=x^2+5y^2-2xy+2xz+6yz$ 化成一个标准形，指出所用的线性变换并求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解：我们有 $f(x,y,z)=(x-y+z)^2+4y^2-z^2+8yz=(x-y+z)^2+4(y+z)^2-5z^2$.

从而原二次型的一个标准形为 $g(u,v,w)=u^2+4v^2-5w^2$.

化为该标准形所用的线性变换为 $\begin{cases}u=x-y+z,\\v=y+z;\\w=z.\end{cases}$

从标准形可以看出该二次型正惯性指数为 2，负惯性指数为 1.

五、(**本题12分**) 令 $V=\{\ x:\ x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t,\ C_k\in\mathbf{R},t\in[0,2\pi]\ \}$ 为定义在 $[0,2\pi]$ 上的函数集.

(1) 证明 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. (6分)

(2) 证明 $\{\ 1,\cos t,\cos^2 t,\cos^3 t\ \}$ 为 V 的一组基. (6分)

证明：(1) 任取 V 中的两个元素

$x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t\in V,y=D_1+D_2\cos t+D_3\cos^2 t+D_4\cos^3 t\in V$.

则 $x+y=(C_1+D_1)+(C_2+D_2)\cos t+(C_3+D_3)\cos^2 t+(C_4+D_4)\cos^3 t$，其中 $C_k+D_k\in\mathbf{R}$.

故 $x+y\in V$.

任取 $\lambda\in\mathbf{R},x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t\in V$，

则 $\lambda x=(\lambda C_1)+(\lambda C_2)\cos t+(\lambda C_3)\cos^2 t+(\lambda C_4)\cos^3 t$，其中 $\lambda C_k\in\mathbf{R}$. 故 $\lambda x\in V$.

我们得到 V 的元素对于加法和数乘满足封闭性.

容易验证：对任意的 $x,y,z\in V$，有 $x+y=y+x,(x+y)+z=x+(y+z)$，

V 中的零元素为 $x=0$，　　$x=C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t$ 的负元素为

$-x=-C_1-C_2\cos t-C_3\cos^2 t-C_4\cos^3 t$.

对任意的 $\lambda,\mu\in\mathbf{R},x,y\in V$，有 $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x,\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x,1x=x$.

故 V 的全体元素对函数的加法和数乘运算构成一个 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(2) 显然 $1,\cos t,\cos^2 t,\cos^3 t$ 可以表示 V 的所有元素，下面证明线性无关.

取 4 个实数 C_1,C_2,C_3,C_4 使得对于任意的 $t\in[0,2\pi]$，有 $C_1+C_2\cos t+C_3\cos^2 t+C_4\cos^3 t=0$.

取 $t_1=0,t_2=\pi/4,t_3=\pi/2,t_4=\pi$. 我们有
$$\begin{cases}C_1+C_2\cos t_1+C_3\cos^2 t_1+C_4\cos^3 t_1=0,\\C_1+C_2\cos t_2+C_3\cos^2 t_2+C_4\cos^3 t_2=0,\\C_1+C_2\cos t_3+C_3\cos^2 t_3+C_4\cos^3 t_3=0,\\C_1+C_2\cos t_4+C_3\cos^2 t_4+C_4\cos^3 t_4=0.\end{cases}\qquad(*)$$

由范德蒙行列式可知 $\begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1 & \cos^3 t_1 \\ 1 & \cos t_2 & \cos^2 t_2 & \cos^3 t_2 \\ 1 & \cos t_3 & \cos^2 t_3 & \cos^3 t_3 \\ 1 & \cos t_4 & \cos^2 t_4 & \cos^3 t_4 \end{vmatrix} \neq 0$，因此方程组(*) 只有零解.

即$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$，从而 $1, \cos t, \cos^2 t, \cos^3 t$ 线性无关.

六、(**本题24分**) 设 B 为 n 阶实对称矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算 $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}$. (6分)

(2) 设 A 为 m 阶实对称矩阵，C 为 m 阶可逆实矩阵. 证明 A 正定当且仅当 $C^{\mathrm{T}}AC$ 正定. (6分)

(3) 证明 $E - B^2$ 为对称矩阵. 证明 $E - B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

(4) 利用以上结论证明实对称矩阵 $\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1. (6分)

解：(1) $\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$.

(2) 因为 C 可逆，故 A 与 $C^{\mathrm{T}}AC$ 合同，有合同关系的对称矩阵有相同的正定性，因为它们都合同于E.

(3) $(E - B^2)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - (B^2)^{\mathrm{T}} = E - B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = E - B^2$. 所以 $E - B^2$ 是对称矩阵.

因为 $\lambda(E - B^2) = 1 - \lambda(B^2) = 1 - \lambda(B)^2$，由 $E - B^2, B$ 的对称性，有

$E - B^2$正定$\Leftrightarrow$所有的$\lambda(E - B^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda(B)^2 > 0 \Leftrightarrow |\lambda(B)| < 1 \Leftrightarrow B$所有特征值的绝对值小于1.

(3) 的证法二：$(E - B^2)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - (B^2)^{\mathrm{T}} = E - B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = E - B^2$. 所以 $E - B^2$ 是对称矩阵.

令 P 为正交矩阵使得 $P^{\mathrm{T}}BP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. 我们有 $P^{\mathrm{T}}(E - B^2)P = \mathrm{diag}\{1 - \lambda_1, \cdots, 1 - \lambda_n\}$.

因此，$E - B^2$ 正定$\Leftrightarrow E - B^2$的特征值均为正实数$\Leftrightarrow$对任意的 $i = 1, \cdots, n$, 有$1 - \lambda_i^2 > 0$

$\Leftrightarrow$对任意的 $i = 1, \cdots, n$,有 $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow$ B的所有特征值的绝对值小于 1.

(4) 由(1)和(2)，我们得到 $\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$ 正定.

分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & E - B^2 \end{pmatrix}$ 正定当且仅当其正惯性指数为 $2n$，当且仅当 $E - B^2$ 正惯性指数为 n，当且仅当 $E - B^2$ 正定. 由(3)，我们得到 $E - B^2$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于 1.

综上所述，$\begin{pmatrix} E & B \\ B & E \end{pmatrix}$ 正定当且仅当 B 的所有特征值的绝对值小于1.

线性代数试卷 答案 2023.6.14

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&4&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&-1\\0&0&5\end{pmatrix}, C=AB$，计算行列式 $|C|$ 的值.

解：$|C|=|A|\cdot|B|=-2\times 30=-60$.

解法二：$|C|=\begin{vmatrix}4&5&3\\6&9&4\\4&14&-10\end{vmatrix}=-60$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}$，求齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.

解：$A=\begin{pmatrix}8&1&-2&33\\-3&-3&6&-15\\5&4&-8&24\\12&3&-6&51\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解法二：设 $A=BC$，易知 B列满秩，故 $Ax=BCx=By=\theta$ 得等价方程组 $Cx=y=\theta$.

$C=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$，故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解法三：初等行变换 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

3. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$，计算二次型的正负惯性指数.

解：$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&2&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\overset{c_2+0.5c_3}{\underset{r_2+0.5r_3}{\to}}\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\overset{c_1+c_2}{\underset{r_1+r_2}{\to}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，故正惯性指数为3，负惯性指数为0.

解法二：$f=(2x_3-x_2)^2+(x_2-x_1)^2+2x_1^2=y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，故正惯性指数为3，负惯性指数为0.

4. 设 T 为3维实线性空间 V 上的线性变换，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 V 上的一组基，V 中的3个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有关系 $T\alpha_1=\alpha_3,T\alpha_2=\alpha_1,T\alpha_3=-\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,0)^{\mathrm{T}},(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 T 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵 A.

解：令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)P$，$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，

$|P|\neq 0$，知 P 为基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵，B 为 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵，

于是 $B=P^{-1}AP$，故 $A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&6\\-1&-0.5&-2\end{pmatrix}$.

二、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，其中 k 为参数.

(1) 若 $\beta=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求参数 k 的范围使得 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性相关.

(2) 若 A 有特征值 $1,2,5$，求参数 k 的范围.

解：(1) $|\beta,A\beta,A^2\beta|=\begin{vmatrix}1&k+3&k^2+3k+11\\2&6&k+20\\1&5&k+19\end{vmatrix}=3k^2-8k+4=0$，解得 $k=2$ 和 $k=2/3$.

(2) 因为有 $\mathrm{tr}(A)=k+4=1+2+5$，故得 $k=4$.

三、(本题12分) 设 $A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为对应特征向量.

(1) 计算 $B=2E+A$ 的特征值和特征向量.

(2) 若 $C\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ 有关系 $C\alpha_1=(1+\lambda_1)\alpha_1,C\alpha_2=(2+\lambda_2)\alpha_2,C\alpha_3=(3+\lambda_3)\alpha_3$，计算矩阵 C.

解：(1) 易知 $B\alpha_i=(2E+A)\alpha_i=2\alpha_i+\lambda_i\alpha_i=(2+\lambda_i)\alpha_i,i=1,2,3$，故 B 的特征向量为 $3,4,5$，对应特征向量为 $k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R},k_1,k_2,k_3\neq 0$.

(2) 易知 $C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(2\alpha_1,4\alpha_2,6\alpha_3)$，故有

$$C=(2\alpha_1,4\alpha_2,6\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}2&8&12\\4&4&0\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&8\\4&4&-8\\0&-2&6\end{pmatrix}.$$

四、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$，故 A 有特征值 $\lambda=2(2\text{重}),-4$.

$\lambda=2$ 时，有 $2E-A\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，标准正交化

得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt5}(2,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5)^{\mathrm{T}}$.

(或者标准正交化 α_2,α_1 得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$)

$\lambda=-4$ 时，有 $-4E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得单位特征向量 $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则有 Q 为正交矩阵，且有 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(2,2,-4)$.

五、(本题12分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为实二次型，其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n},A^{\mathrm{T}}=A$, $x\in\mathbf{R}^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组.

(1) 证明若二次型 $f(x)$ 为正定二次型，则有 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$.

(2) 举出反例说明由 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$ 不能得出 $f(x)$ 是正定二次型.

证：(1) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组，故 $\alpha_i\neq\theta,i=1,2,\cdots,n$. 于是由正定性得 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$.

(2) 反例：$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

α_1,α_2 线性无关，且有 $f(\alpha_1)=1>0,f(\alpha_2)=1>0$，但是 $f(\beta)=-2<0$，故 $f(x)$ 非正定.

六、(本题12分) 设 W_1,W_2,W_3 为 $\mathbf{R}^4$ 上的子空间，其中 $\alpha_1=(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,-5,6)^{\mathrm{T}}$ 为 W_1 的一组基，$\beta_1=(1,-1,-2,4)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 为 W_2 的一组基，$\gamma_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=(2,1,2,-4)^{\mathrm{T}}$ 为 W_3 的一组基.

(1) 求子空间 W_1+W_2 的一组基.

(2) 求子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

解：(1) $W_1+W_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$，找 W_1+W_2 的基只要找向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的极大无关组即可.

$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\to\begin{pmatrix}1&0&0.5&0\\0&1&0.5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, (或$\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&2&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$) 可取 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$ 作为一组基.

(2) 设向量 $\xi\in(W_1+W_2)\cap W_3$，故有 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_2=x_4\gamma_1+x_5\gamma_5$.

即 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)x=\theta,x=(x_1,x_2,x_3,-x_4,-x_5)^{\mathrm{T}}$.

解方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-0.5\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1.5\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\eta=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-3\\2\end{pmatrix}$,

故 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(-1,4,-7,2)^{\mathrm{T}}$ 可作为子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

七、(本题12分) (1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots n\\ j\neq i}}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，证明$Ax=\theta$只有零解.

(2) 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$s=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$，利用(1)的结论证明矩阵 $C=sE+B$ 可逆.

证：(1) 反证法，假设 $Ax=\theta$ 有非零解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\theta$，$x_k$ 满足 $|x_k|=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}|x_i|>0$，

看 $Ax=\theta$ 的第k个方程：$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k+\cdots+a_{kn}x_n=0$，于是有

$|-a_{kk}x_k|=|\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq k}}a_{kj}x_j|\leq\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}x_j|\leq\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}|\cdot|x_k|\leq|x_k|(\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}|)<|x_k|\cdot|a_{kk}|.$

得出矛盾，故 $Ax=\theta$ 只有零解.

(2) 易知 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 有 $\begin{cases} c_{ij}=b_{ij}, & i\neq j,\\ c_{ij}=s+b_{ij} & i=j.\end{cases}$

故 $|c_{ii}|=|s+b_{ii}|\geq s-|b_{ii}|\geq 1+\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq i}}|b_{ij}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq i}}|c_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$. 即 C 满足(1)的条件，得 $Cx=\theta$ 只有零解，故 C 可逆.